

الوحدة الخامسة
الإزدواجـــات

٥ - ١ الإزدواجـــات

تعريف :

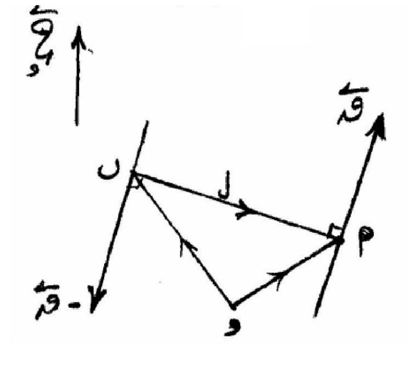
الإزدواج هو نظام من القوى يتكون من قوتين متساويتين فى المعيار ومتضادتين فى الإتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد،ومن أمثلة الإزدواج أدارة عجلة قيادة السيارة ، وإدارة صنبور المياه.

عزم الإزدواج:

هو مجموع عزمى قوتى الإزدواج حول أى نقطة فى الفراغ ومعيار عزم الإزدواج يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البعد العمودى بين القوتين ويرمز له بالرمز ج = || $\overleftarrow{ج}$ ||

∴ || $\overleftarrow{ج}$ || = ق × ل حيث ق = || $\overleftarrow{ق}$ || ، ل يسمى ذراع الإزدواج

نظرية:



عزم الإزدواج هو متجه ثابت لايعتمد على النقطة التى ينسب اليها عزم قوتيه ويساوى عزم إحدى قوتي الإزدواج حول نقطة على خط عمل القوة الأخرى

فإذا كانت $\overleftarrow{ق}$ ، $-\overleftarrow{ق}$ هما القوتين المكونتين للإزدواج

حيث || $\overleftarrow{ق}$ || = ق فإن عزم الإزدواج هو:

$$\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{بأ} \times \overleftarrow{ق} = \overleftarrow{أب} \times (-\overleftarrow{ق})$$

مثـــال:

إذا كان $\overleftarrow{ق}_١$ ، $\overleftarrow{ق}_٢$ قوتى إزدواج بحيث $\overleftarrow{ق}_١ = -٣\overleftarrow{س} + ٢\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ(١،١) ، $\overleftarrow{ق}_٢$ تؤثر فى النقطة ب(-١،٢) أوجد $\overleftarrow{ق}_٢$ ثم أوجد عزم الإزدواج وكذلك طول العمود المرسوم من أ على $\overleftarrow{ق}_٢$.

الحـــل:

∵ $\overleftarrow{ق}_١$ ، $\overleftarrow{ق}_٢$ قوتى الإزدواج ∴ $\overleftarrow{ق}_١ = -\overleftarrow{ق}_٢$

∴ $-٣\overleftarrow{س} + ٢\overleftarrow{ص} = -\overleftarrow{ق}_٢$ ∴ $\overleftarrow{ق}_٢ = ٣\overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص}$ #

∵ عزم الإزدواج = عزم $\overleftarrow{ق_2}$ حول نقطة أ أو عزم $\overleftarrow{ق_1}$ حول نقطة ب

∴ $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{ق_2}$ ، ∵ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = (-١،٢) - (١،١) = (-٢،١)$

∴ $\overleftarrow{ج} = (-٢،١) \times (٣،-٢) = (٤-٣)\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ع}$

∵ $\|\overleftarrow{ج}\| = ق \times ل$ ∴ $ل = \frac{\|\overleftarrow{ج}\|}{ق_2} = \frac{١}{\sqrt{٣^٢+٢^٢}} = \frac{١}{\sqrt{١٣}}$ وحدة طول

الإزدواجات المستوية:

هى الإزدواجات التى تؤثر على جسم متماسك بحيث تكون خطوط عمل قوى هذه الإزدواجات تقع فى مستو واحد وفى هذه الحالة يتم استخدام القياسات الجبرية لإيجاد عزوم هذه الإزدواجات وتتحدد إشارة القياس الجبرى تبعا للقاعدة التالية:

قاعدة:

- القياس الجبرى لعزم الإزدواج يكون موجب إذا كانت قوتيه تعملان على الدوران ضد عقارب الساعة
- القياس الجبرى لعزم الإزدواج يكون سالب إذا كانت قوتيه تعملان على الدوران مع عقارب الساعة

إتزان جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين:

تعريف:

يقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير إزدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى

نتيجة:

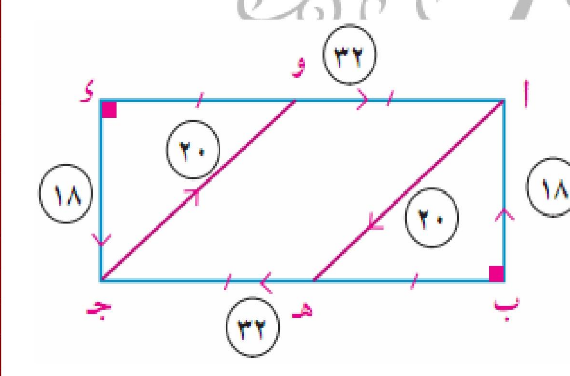
يتزن الجسم تحت تأثير إزدواجين مستويين أو أكثر إذا إنعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الإزدواجات

حقيقة:

الإزدواج لا يتزن الا مع إزدواج آخر مساو له فى المعيار ومضاد له فى الإتجاه

مثال:

فى الشكل المقابل: أبجء مستطيل ، هـ،و منتصفات $\overline{بج}$، $\overline{أء}$ ، أب = ٦ سم ، بج = ١٦ سم فإذا كانت القوى المؤثرة بالنيوتن ومقاديرها وإتجاهاتها كما بالشكل أثبت أن المجموعة متزنة.



الحل:

القوتان ٣٢ ، ٣٢ نيوتن تكونا إزدواجا القياس الجبرى لعزمه

$ج_1 = -٣٢ \times أب = -٣٢ \times ٦ = -١٩٢$ نيوتن .سم

القوتان ١٨ ، ١٨ نيوتن تكونا إزدواجا القياس الجبرى لعزمه

$ج_2 = ١٨ \times بجـ = ١٨ \times ١٦ = ٢٨٨$ نيوتن .سم

ايجاد طول هـم

$\because$ أب = ٦ ، بهـ = ٨ $\therefore$ أهـ $= \sqrt{٨^2 + ٦^2} = ١٠$

$\because$ هـم = هـجـ جاى $\therefore$ هـم $= ٨ \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٢٤}{٥}$

القوتان ٢٠ ، ٢٠ نيوتن تكونا إزدواجا القياس الجبرى لعزمه

$ج_3 = -٢٠ \times$ هـم $= -٢٠ \times \frac{٢٤}{٥} = -٩٦$ نيوتن .سم

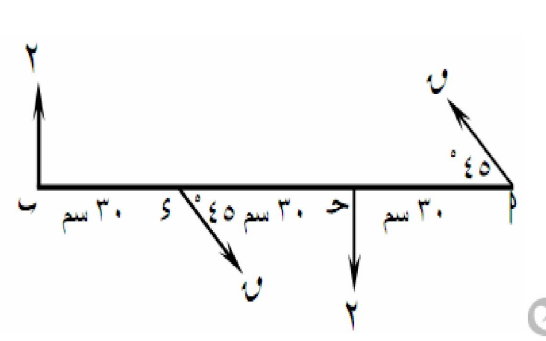
$\because ج_1 + ج_2 + ج_3 = -١٩٢ + ٢٨٨ - ٩٦ = ٠$ $\therefore$ المجموعة متزنة



مثال:

أثر ازدواجان مستويان فى قضيب أب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، وكان الإزدواج الأول يتكون من قوتين ق ، ق ث كجم . والثانى من قوتين ٢ ، ٢ ث كجم وتؤثر عند النقط وفى الإتجاهات الموضحة بالشكل المجاور

عين قيمة ق التى تجعل الجسم يتزن تحت تأثير الإزدواجين.



الحل:

القوتان ٢ ، ٢ تكونا إزدواج عزمه $ج_1$ حيث $ج_1 = -٢ \times ٦٠ = -١٢٠$ ث كجم.سم

القوتان ق ، ق تكونا إزدواج عزمه $ج_2$ حيث $ج_2 =$ ق $\times$ ل $=$ ق $\times ٦٠$ جا $٤٥°$

$\therefore ج_2 =$ ق $\times ٦٠ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٣٠\sqrt{٢}$ ق ث كجم.سم

$\because$ الجسم متزن تحت تأثير الإزدواجين

$\therefore ج_1 + ج_2 = ٠$ $\therefore -١٢٠ + ٣٠\sqrt{٢}$ ق $= ٠$

$\therefore ٣٠\sqrt{٢}$ ق $= ١٢٠$ $\therefore$ ق $= \frac{١٢٠}{٣٠\sqrt{٢}} = ٢\sqrt{٢}$ ث كجم.

مثــــال:

أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوى ٧ ، ٤ ، ٧ ، ٤ ث جم فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{هـ د}$ ، $\overleftarrow{هـ و}$ على الترتيب. كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ق ث جم فى $\overleftarrow{جـ د}$ ، $\overleftarrow{و أ}$ عين قيمة ق أذا علم أن المجموعة متوازنة.

الحـــل:

القوتان ٧ ، ٧ ث.جم تكونا إزدواج عزمه $ج_1$ حيث

$ج_1 = ٧ \times أهـ = ٧ \times ١٠\sqrt{٣} = ٧٠\sqrt{٣}$ ث جم.سم

القوتان ٤ ، ٤ ث.جم تكونا إزدواج عزمه $ج_2$ حيث

$ج_2 = - ٤ \times وب = - ٤ \times ١٠\sqrt{٣} = - ٤٠\sqrt{٣}$ ث جم.سم

القوتان ق ، ق ث.جم تكونا إزدواج عزمه $ج_3$ حيث

$ج_3 = - ق \times أجـ = - ق \times ١٠\sqrt{٣} = - ١٠\sqrt{٣}$ ق ث جم.سم

∵ المجموعة متوازنة ∴ $ج_1 + ج_2 + ج_3 = ٠$

∴ $٧٠\sqrt{٣} - ٤٠\sqrt{٣} - ١٠\sqrt{٣}$ ق $= ٠$ ⇐ ∴ $٣٠ - ١٠$ ق $= ٠$ ⇐ ∴ ق $= ٣$ ث جم

تذكر أن:

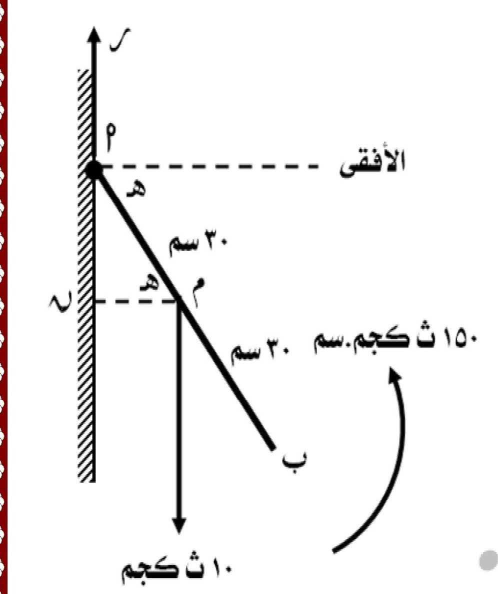
فى السداسى المنتظم إذا كان طول ضلعه = ل فإن:

١) القطر الغير رئيسى يصل بين رأسين غير متتالين ويكون عمودياً على كل من الضلعين المتوازيين الواصل بينهما ، والقطر الرئيسى يصل بين رأسين متقابلين.
٢) جميع الأضلاع متساوية = ل وجميع الزوايا متساوية وقياس كل منها ١٢٠°
٣) طول القطر الغير رئيسى = ل$\sqrt{٣}$
٤) طول القطر الرئيسى = ٢ل

مثــــال:

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ ث كجم يؤثر فى منتصفه ويتحرك فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ ، أثر على القضيب إزدواج فى مستوى رأسى ، القياس الجبرى لعزمه ١٥٠ ث كجم.سم .
برهن على أن رد فعل المفصل عند أ يساوى وزن القضيب وأوجد ميل القضيب على الأفقى فى وضع التوازن.

الحـــل:



نفرض أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ

القضيب متزن تحت تأثير:

- وزن القضيب ١٠ ث كجم رأسياً لأسفل
- رد فعل المفصل (ر) وهو مجهول الإتجاه
- الإزدواج المؤثر وعزمه $ج_١ = ١٥٠$ ث كجم.سم

∵ الإزدواج لايتزن إلا مع إزدواج آخر

∴ وزن القضيب ورد فعل المفصل يجب أن يكونا إزدواج أخر عزمه $ج_٢$

∴ رد الفعل المفصل = وزن القضيب ويكون رأسيا لأعلى

∴ ر = ١٠ ث كجم رأسيا لأعلى

∵ القضيب متزن ∴ $ج_١ + ج_٢ = ٠$ حيث $ج_٢ = -١٠ \times م ن$

∴ $١٥٠ - ١٠ \times م ن = ٠$ ⟸ ∴ ١٠ م ن = ١٥٠ ⟸ ∴ م ن = ١٥ سم

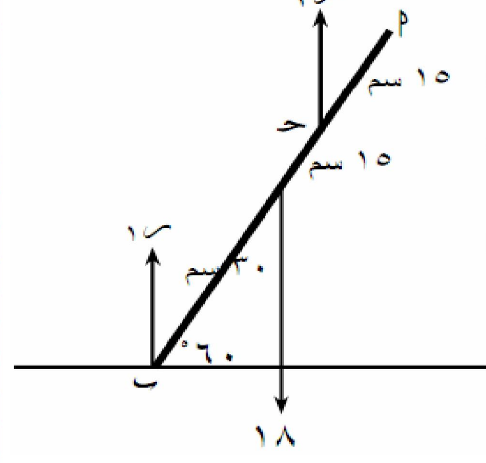
∴ $جتا هـ = \frac{م ن}{م أ} = \frac{١٥}{٣٠} = \frac{١}{٢}$ ⟸ ∴ ق(< هـ) = $جتا^{-١} \frac{١}{٢} = \pm ٦٠°$

أى أنه يوجد وضعين للتوازن ويميل فيهما القضيب على الأفقى بزاوية ٦٠° إما لأعلى أو لأسفل

مثـــال:

أب قضيب منتظم وزنه ١٨ نيوتن وطوله ٦٠ سم ويمكنه الدوران بسهوله فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة جـ التى تبعد ١٥ سم من أ ،فإذا إستند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس فأوجد مقدار وأتجاه رد فعل المسمار ، وإذا شد الطرف أ أفقيا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويا لوزن القضيب فأوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار حينئذ علما بأن القضيب يتزن فى الحالتين فى مستوى رأسى يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° .

الحـــل:



الحالة الأولى:

القضيب متزن تحت تاثير ثلاث قوى وقوتان منهم إتجاهمها معلوم وهما:

الوزن ١٨ نيوتن رأسيا لأسفل ورد فعل النضد الأملس رأسيا لأعلى

∵ هاتان القوتان متوازيتان

∴ رد فعل المسمار يجب أن يوازيهما

∴ رد فعل المسمار يكون رأسيا لأعلى

بتطبيق شروط الإتزان

∴ $ر_١ + ر_٢ = ١٨$ (١)

، ∵ $ج_ب = ٠$ ∴ -١٨×٣٠ جتا ٦٠° + $ر_٢ \times ٤٥$ جتا ٦٠° = ٠ ∴ $٤٥ ر_٢ = ١٨ \times ٣٠$

∴ $ر_٢ = \frac{١٨ \times ٣٠}{٤٥} = ١٢$ نيوتن وبالتعويض فى (١) ∴ $ر_١ = ٦$ نيوتن

الحالة الثانية:

∵ رد فعل النضد = وزن القضيب = ١٨ نيوتن ∴ القوتان ١٨ ، ١٨ تكونا إزدواج عزمه $ج_١$ حيث

$ج_١ = -١٨ \times ٣٠$ جتا ٦٠ = -٢٧٠ نيوتن.سم

∵ القضيب متزن ، ∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج مثله

قوة الشد (ش) ورد فعل المسمار (ر) يجب أن يكونا إزدواج

∴ ر = ش ويضادها فى الإتجاه

أى أن رد فعل المسمار يكون أفقيا وفى عكس إتجاه الشد

ويكون عزم الإزدواج هو $ج_٢$ حيث

$ج_٢ = ش \times ١٥$ جا ٦٠ = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ ش نيوتن.سم

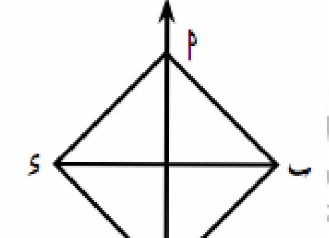
∵ القضيب متزن تحت تأثير الإزدواجين ∴ $ج_١ + ج_٢ = ٠$ ∴ $-٢٧٠ + \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢} ش = ٠$

∴ ش = $\frac{٢ \times ٢٧٠}{١٥\sqrt{٣}}$ ⟸ ∴ ش = ر = $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن

مثـــال:

أب جـ ء صفيحة على هيئة مربع طول ضلعه ٥٠ سم ووزنها ٣٠٠ ث جم ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين ثقبت الصفيحة ثقبا صغيرا بالقرب من أ وعلقت من هذا الثقب فى مسمار أفقى رفيع بحيث اتزنت فى مستوى رأسى. أوجد الضغط على المسمار . وإذا أثر على الصفيحة إزدواج معيار عزمه ٧٥٠٠ ث جم.سم وإتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة ،إثبت أن الضغط على المسمار لايتغير ثم أوجد ميل القطر $\overline{أجـ}$ على الرأسى فى وضع الإتزان.

الحـــل:



اولا: قبل التأثير على الصفيحة بالإزدواج:

الصفيحة متزنة تحت تأثير قوتين:

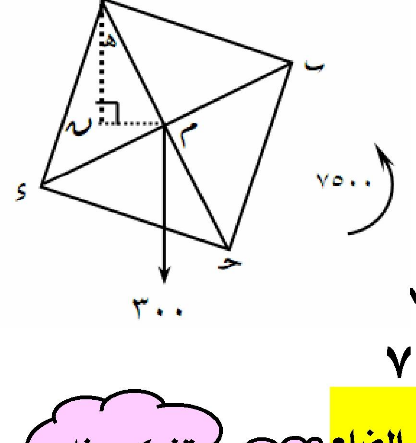
- وزن الصفيحة ٣٠٠ ث جم رأسياً لأسفل
- رد فعل المسمار (ر)

∴ ر = ٣٠٠ ث جم رأسيا لأعلى

ثانيا: بعد التأثير على الصفيحة بالإزدواج:

نفرض أن القطر $\overline{أجـ}$ يميل على الرأسى بزاوية قياسها هـ

الصفيحة متزنة تحت تأثير:



- وزن الصفيحة ٣٠٠ ث جم رأسياً لأسفل
- رد فعل المسمار (ر)
- الإزدواج المؤثر وعزمه $ج_1 = ٧٥٠٠$ ث جم.سم

∵ الإزدواج لايتزن إلا مع إزدواج آخر

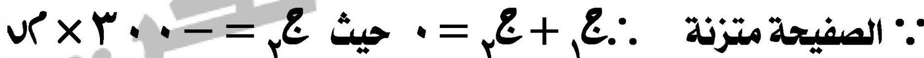
∴ الوزن (٣٠٠) ورد الفعل (ر) يجب أن يكونا إزدواج أخر عزمه $ج_2$

∴ ر = ٣٠٠ ث جم رأسيا لأعلى ∴ رد فعل المسمار لم يتغير

∵ الصفيحة متزنة ∴ $ج_1 + ج_2 = ٠$ حيث $ج_2 = -٣٠٠ \times م ن$

∴ $٧٥٠٠ - ٣٠٠ \times م ن = ٠$ ⟸ ∴ $٣٠٠ م ن = ٧٥٠٠$

∴ $م ن = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥$ سم ،



تذكر هذا دائما

∴ أجـ = $٥٠\sqrt{٢}$ سم ⟸ ∴ $أم = \frac{٥٠\sqrt{٢}}{٢} = ٢٥\sqrt{٢}$ سم

∴ $جاهـ = \frac{٢٥}{٢٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⟸ ∴ $ق(\angle هـ) = جا^{-١} \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٤٥°$

∴ $\overline{أجـ}$ يميل على الرأسى بزاوية ٤٥° أى أن $\overline{أء}$ يكون فى وضع رأسى



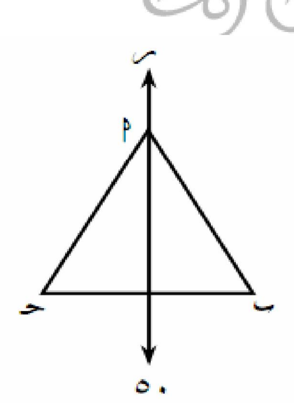
مثــــال:

أبجـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ووزنها ٥٠ ث جم ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث ، علقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسياً أوجد الضغط على المسمار ، وإذا أثر على الصفيحة إزدواج معيار عزمه يساوى ٢٥٠ ث جم.سم وإتجاهه عمودى على مستويها فإتزنت ، أوجد ميل الضلع $\overline{أب}$ على الأفقى إذا علم أن إرتفاع المثلث يساوى ١٥ سم.

الحــــل:

اولا: قبل تأثير الإزدواج على الصفيحة:

الصفيحة متزنة تحت تأثير قوتين:



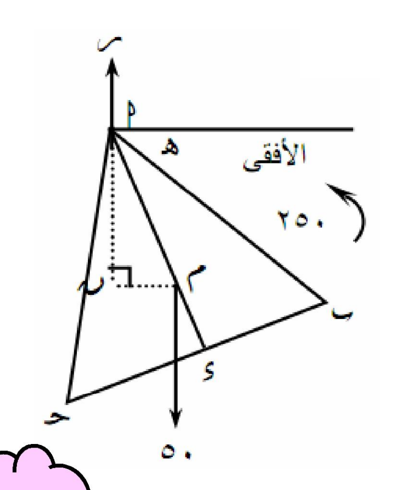
- وزن الصفيحة ٥٠ ث جم رأسياً لأسفل
- رد فعل المسمار (ر)

∴ ر = ٥٠ ث جم رأسيا لأعلى

ثانيا: بعد التأثير على الصفيحة بالإزدواج:

نفرض أن الضلع $\overline{أب}$ يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ

الصفيحة متزنة تحت تأثير:



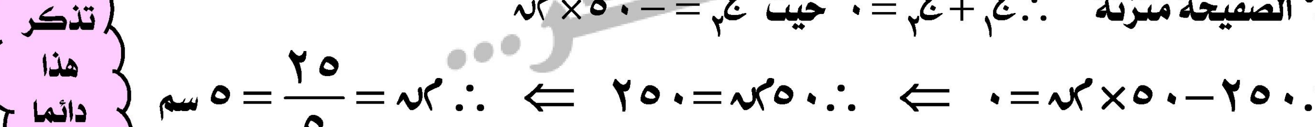
- وزن الصفيحة ٥٠ ث جم رأسياً لأسفل
- رد فعل المسمار (ر)
- الإزدواج المؤثر وعزمه $ج_١ = ٢٥٠$ ث جم.سم

∵ الإزدواج لايتزن الا مع إزدواج آخر

∴ الوزن (٥٠) ورد الفعل (ر) يجب أن يكونا إزدواج أخر عزمه $ج_٢$

∴ ر = ٥٠ ث جم رأسيا لأعلى ∴ رد فعل المسمار لم يتغير

∵ الصفيحة متزنة ∴ $ج_١ + ج_٢ = ٠$ حيث $ج_٢ = -٥٠ \times م ن$



∴ $٢٥٠ - ٥٠ \times م ن = ٠$ ⟸ ∴ $٥٠ م ن = ٢٥٠$ ⟸ ∴ $م ن = \frac{٢٥}{٥} = ٥$ سم

تذكر هذا دائما



∵ $أء = ١٥$ سم ، ∵ **نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة**

∴ $أم = \frac{٢}{٣} أء$ سم ⟸ ∴ $أم = \frac{٢}{٣} \times ١٥ = ١٠$ سم

∴ $جا(\angle م أ ن) = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ $ق(\angle م أ ن) = جا^{-١} \frac{١}{٢} = ٣٠°$ أى أن $\overline{أجـ}$ يكون رأسياً



∴ $\overline{أب}$ يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° كما هو موضح بالشكل (١)

الأفقى ، الرأسى ، ٣٠° ، ٦٠°

شكل (١)

وإذا كانت رؤوس المثلث فى إتجاه ضد عقارب الساعة فإن $\overline{أب}$ يكون رأسياً

∴ $\overline{أب}$ يميل على الأفقى بزاوية ٩٠° كما هو موضح بالشكل (٢)

الأفقى ، الرأسى ، ٣٠° ، ٦٠°

شكل (٢)

تكافؤ إزدواجين:

تعريف:

يقال لإزدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما

أى أنه

إذا كان $\overrightarrow{ج_١}$ ، $\overrightarrow{ج_٢}$ هما عزمى الإزدواجين فإن شرط تكافؤ هذين الإزدواجين هو:

$$ج_١ - ج_٢ = ٠ \quad \text{أى أن} \quad ج_١ = ج_٢$$

ملاحظة:

الإزدواج لايتكافئ الا مع إزدواج آخر مساو له فى معيار العزم وله نفس إتجاه الدوران

مثـــال:

أبجد مستطيل فيه أب = ٤٠ سم ، بجـ = ٣٠ سم. أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٠٠ نيوتن فى $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جد}$ وقوتان $\overline{ق}$ ، $-\overline{ق}$ عند أ ، جـ وتوازيان $\overline{بد}$. عين قيمة ق حتى يتكافأ الإزدواجان الناتجان.

الحـــل:

القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ نيوتن تكونا إزدواج عزمه $ج_١$ حيث

$ج_١$ = ٢٠٠ × ٣٠ = ٦٠٠٠ نيوتن.سم

القوتان ق ، ق تكونا إزدواج عزمه $ج_٢$ = ق × أه نيوتن.سم

حساب طول أه :

∵ ص منتصف أجـ ، ∵ $\overline{صس}$ // $\overline{جه}$ ∴ س منتصف أه

∴ أس = سه ∴ أه = ٢أس

من المثلث أبد ∵ أس = $\frac{أب \times أد}{بد}$ ⇐ ∴ أس = $\frac{\quad}{٥٠}$ ... سم

∴ أه = ٢أس = ٢ × ٢٤ = ٤٨ سم



، ∵ الإزدواجان متكافئان ∴ $ج_١ = ج_٢$ حيث $ج_٢$ = ق × أه

∴ ق × ٤٨ = ٦٠٠٠ ⇐ ∴ ق = $\frac{٦٠٠٠}{٤٨}$ = ١٢٥ نيوتن

تذكر أن:

- فى المثلث القائم يكون طول العمود الساقط من رأس القائمة على الوتر يساوى حاصل ضرب طولا ضلعى القائمة مقسوما على طول الوتر
- طول الضلع المقابل لزاوية = طول الوتر × جيب (جا) الزاوية
- طول الضلع المجاور لزاوية = طول الوتر × جيب تمام (جتا) الزاوية

مثـــال:

أبجد شبه منحرف فيه $\overline{أد}$ // $\overline{بجـ}$ ، أب = ١٠ سم ، بجـ = ٣٢ سم ، جد = ١٧ سم ، دأ = ١١ سم

أثرت قوة مقدارها ١٦ نيوتن فى $\overrightarrow{دأ}$ وقوة مقدارها ١٦ نيوتن فى $\overrightarrow{بجـ}$ ، أوجد قوتين أحدهما تؤثر فى $\overleftrightarrow{أب}$ والأخرى تؤثر فى نقطة جـ تكافئان القوى السابقة.

الحـــل:

القوتان ١٦، ١٦ نيوتن تكونا إزدواج عزمه $ج_1$ حيث

$ج_1$ = ١٦ × أس نيوتن.سم

حساب طول أس :

∵ أد = ١١ سم ، ∴ س ص = ١١ سم

∴ ب س + ص جـ = ٣٢ − ١١ = ٢١ سم

نفرض أن: ب س = ل ∴ ص جـ = ٢١ − ل

من Δ أس ب : $(أس)^2 = (أب)^2 - (بس)^2 = ١٠^2 - ل^2$

من Δ دص جـ : $(دص)^2 = (دجـ)^2 - (جـص)^2 = ١٧^2 - (٢١ - ل)^2$

∵ أس = دص ∴ $١٠٠ - ل^2 = ٢٨٩ - (٢١ - ل)^2$

∴ $١٠٠ - ل^2 = ٢٨٩ - ٤٤١ + ٤٢ل - ل^2$ ⇐ ∴ ١٠٠ = −١٥٢ + ٤٢ل

∴ ٤٢ل = ٢٥٢ ⇐ ∴ ل = $\frac{٢٥٢}{٤٢}$ = ٦

∴ $(أس)^2 = ١٠٠ - ل^2 = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$ ⇐ ∴ أس = ٨ سم

∴ $ج_1$ = ١٦ × أس = ١٦ × ٨ = ١٢٨ نيوتن.سم

∵ الإزدواج لايتكافئ إلا مع إزدواج مثله

∴ القوتان فى $\overleftrightarrow{أب}$ وفى نقطة جـ يجب أن يكونا إزدواج أخر عزمه $ج_2$

∴ القوة عند نقطة جـ يجب أن توازى أب وتكون فى إتجاه $\overrightarrow{بأ}$

، ∵ الإزدواجان متكافئان ∴ $ج_1 = ج_2$ حيث $ج_2$ = ب جـ جاهـ × ق ، جاهـ = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

∴ ٣٢ × $\frac{٤}{٥}$ × ق = ١٢٨ ⇐ ∴ ق = ١٢٨ × $\frac{٥}{١٢٨}$ = ٥ نيوتن



٥ - ٢ الإزدواج المحصل

نظام القوى المستوية الذى يكافئ إزدواجا:

مجموعة القوى المستوية $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ ، $\overleftarrow{ق}_3$ ، . . . . . ، $\overleftarrow{ق}_ن$ تكافئ إزدواجا إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً:

١- محصلة القوى تساوى صفر (أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى إتجاه = صفر)

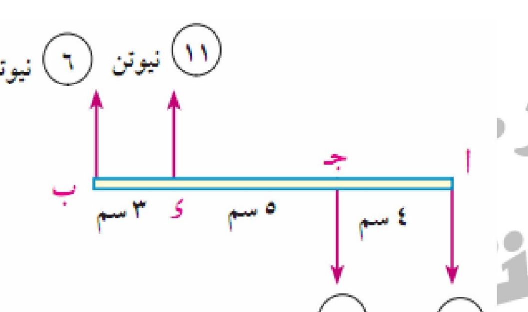
٢- مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا يساوى صفر

مثـــال:

فى الشكل المقابل:

أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجا

وأوجد القياس الجبرى لعزمه



الحـــل:

بفرض أن $\overleftarrow{ى}$ وحدة متجهات راسيا لأعلى

∴ $\overleftarrow{ح} = ١١\overleftarrow{ى} + ٦\overleftarrow{ى} - ٧\overleftarrow{ى} - ١٠\overleftarrow{ى} = \overleftarrow{٠}$

∴ المحصلة تساوى صفر ∴ مجموعة القوى إما أن تكون متزنة أو تكافئ إزدواج

لذلك نوجد مجموع عزوم القوى حول أى نقطة ولتكن ا

∴ $ج_ا = ٧ \times ٤ - ١١ \times ٩ - ٦ \times ١٢ = -١٤٣$

∴ المجموعة تكافئ إزدواجا ، القياس الجبرى لعزمه يساوى -١٤٣ نيوتن . سم

قاعدة:

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تاما أضلاع مثلث مأخوذة فى إتجاه دورى واحد . كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة المثلث فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

أى أنه:

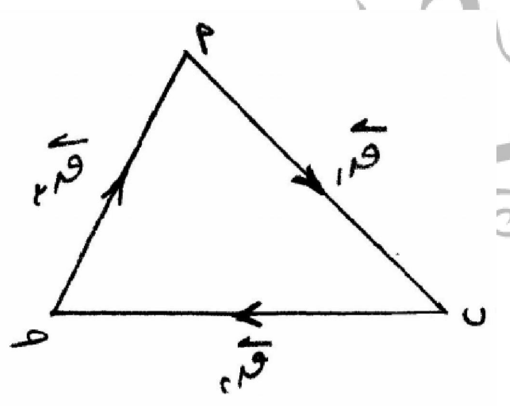
إذا كانت $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ ، $\overleftarrow{ق}_3$ ثلاث قوى مستوية

وكان يمثلها تمثيلاً تاما أضلاع المثلث ا ب جـ

حيث $م = \frac{\text{القوة}}{\text{طول الضلع}}$

فإن هذه القوى تكافئ إزدواج ويكون:

معيار عزم الإزدواج يساوى ضعف مساحة المثلث ا ب جـ × م



وبصفة عامة:

إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تاما أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى إتجـاه دورى واحد . كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.



ملاحظات هامة جداً جداً:

١) القوى تكون فى ترتيب دورى واحد إذا كانت نهاية المتجه الأول هى بداية الثانى ونهاية الثانى هى بداية الثالث .....ثم تكون نهاية الأخير هى بداية الأول

٢) لإيجاد مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال (م) نقسم مقدار القوة على طول الضلع

٣) القوى تكون ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع مضلع إذا كان:

١- القوى فى ترتيب دورى واحد

٢- كل قوة ÷ طول الضلع الممثل لها = مقدار ثابت ويكون هو (م)

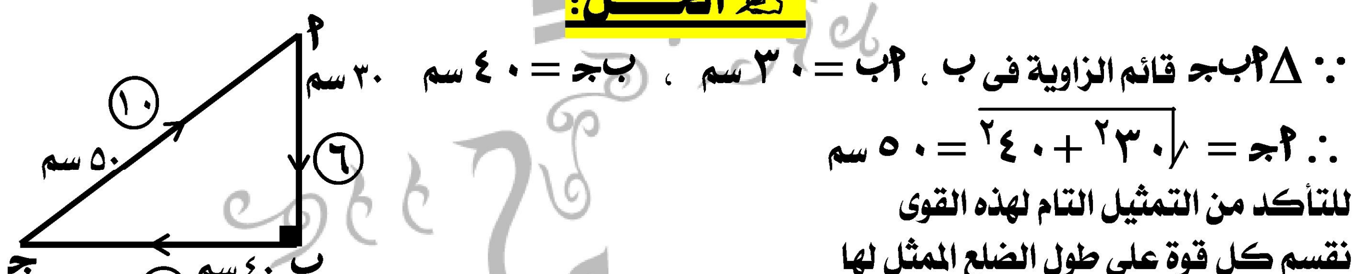
٤) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع

أو مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مثـــال:

أب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٦، ٨، ١٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجا وأوجد معيار عزمه.

الحـــل:



∵ Δ أب جـ قائم الزاوية فى ب ، أب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٤٠ سم

∴ أجـ = $\sqrt{٣٠^٢ + ٤٠^٢}$ = ٥٠ سم

للتأكد من التمثيل التام لهذه القوى

نقسم كل قوة على طول الضلع الممثل لها

∵ $\frac{٦}{أب} = \frac{٦}{٣٠} = \frac{١}{٥}$ ، $\frac{٨}{ب جـ} = \frac{٨}{٤٠} = \frac{١}{٥}$ ، $\frac{١٠}{أجـ} = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$

∴ مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال يساوى $\frac{١}{٥}$ وحيث أن القوى فى ترتيب دورى واحد

∴ القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه = ضعف مساحة المثلث أب جـ × م

∵ مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ا ب × ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٣٠ × ٤٠ = ٦٠٠ سم٢ ، م = $\frac{1}{5}$

∴ معيار عزم الإزدواج = ٢ × ٦٠٠ × $\frac{1}{5}$ = ٢٤٠ نيوتن.سم #

مثـــال:

ا ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{اء}$ // $\overline{بجـ}$ ، $\overline{اب}$ ⊥ $\overline{بجـ}$ ، ا ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم ، اء = ٣ سم

أثرت القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$ والممثلة تمثيلا تاما بالقطع المستقيمة الموجهه $\overleftarrow{ءا}$ ، $\overleftarrow{جـء}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ ، $\overleftarrow{اب}$ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ إزدواجا معيار عزمه ٣٦٠ نيوتن .سم فى الإتجاه ا ب جـ ء فأوجد مقدار كل من $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$.

الحـــل:

∵القوى تؤثر فى إتجاه دورى واحد وممثلة تمثيلا تاما بأضلاع شبه المنحرف

∴ معيار عزم الإزدواج = ضعف مساحة شبه المنحرف × م

∴ ضعف مساحة شبه المنحرف × م = ٣٦٠ (١)

∵ مساحة شبه المنحرف = نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين × الإرتفاع

∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (٩ + ٣) × ٦ = ٣٦ سم٢ بالتعويض فى (١)

∴ ٢ × ٣٦ × م = ٣٦٠ ⇐ ∴ م = $\frac{٣٦٠}{٢ \times ٣٦}$ = ٥

حساب طول جـء

ءهـ = ٦ ،

ب هـ = ٣

∴جـهـ = ٦

∴جـء = ٦ $\sqrt{2}$

∵ $\frac{ق_1}{اء} = \frac{ق_2}{جـء} = \frac{ق_3}{بجـ} = \frac{ق_4}{اب}$ = م

∴ $\frac{ق_1}{٣} = \frac{ق_2}{٦\sqrt{2}} = \frac{ق_3}{٩} = \frac{ق_4}{٦}$ = ٥

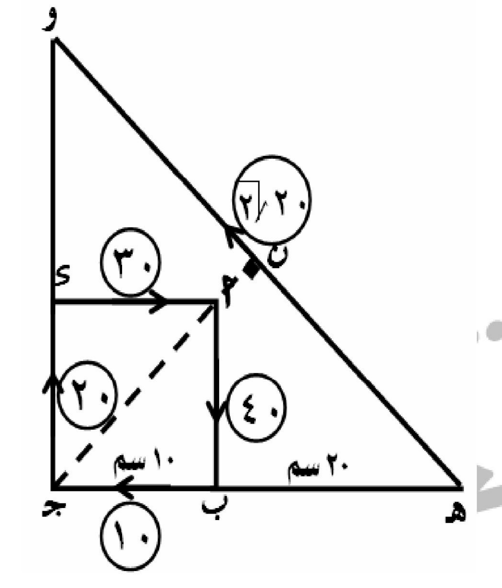
∴ $ق_1$ = ١٥ نيوتن ، $ق_2$ = ٣٠ $\sqrt{2}$ نيوتن ، $ق_3$ = ٣٥ نيوتن ، $ق_4$ = ٣٠ نيوتن

قاعدة:

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها وليست على إستقامة واحدة يساوى مقدارا ثابتا لايساوى صفر ، كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواجا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

مثـــال:

$\overline{أبجـ د}$ مربع طول ضلعه ١٠ سم ، هـ ∈ $\overrightarrow{جب}$ ، و ∈ $\overrightarrow{جد}$ بحيث كان جهـ = جو = ٣٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٢٠$\sqrt{2}$ ث.كجم فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جد}$ ، $\overrightarrow{دأ}$ ، $\overrightarrow{هـو}$ على الترتيب .
أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجا وأوجد عزمه.



الحـــل:

حساب طول جن

∵ جهـ = جو ∴ Δ وجهـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين

∴ ق(∠ هـ) = ٤٥° ∴ جن = جهـ جا ٤٥°

∴ جن = ٣٠ × $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = ١٥$\sqrt{2}$ سم

نحسب مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ولتكن جـ ، هـ ، و

∴ $ع_{جـ}$ = ٢٠$\sqrt{2}$ × نجـ − ٤٠ × بجـ − ٣٠ × دجـ

= ٢٠$\sqrt{2}$ × ١٥$\sqrt{2}$ − ٤٠ × ١٠ − ٣٠ × ١٠ = −١٠٠ ث كجم.سم

، $ع_{هـ}$ = ٤٠ × بهـ − ٢٠ × جهـ − ٣٠ × أب

= ٤٠ × ٢٠ − ٢٠ × ٣٠ − ٣٠ × ١٠ = −١٠٠ ث كجم.سم

، $ع_{و}$ = ٣٠ × دو − ١٠ × جو − ٤٠ × أد

= ٣٠ × ٢٠ − ١٠ × ٣٠ − ٤٠ × ١٠ = −١٠٠ ث كجم.سم

∴ $ع_{جـ}$ = $ع_{هـ}$ = $ع_{و}$ = −١٠٠ ث كجم.سم

∴ المجموعة تكافئ إزدواجا ، القياس الجبرى لعزمه يساوى −١٠٠ ث كجم . سم

الإزدواج المحصل:

يعرف مجموع إزدواجين مستويين على أنه الإزدواج الذى يساوى عزمه مجموع عزمى هذين الإزدواجين ويسمى مجموع إزدواجين مستويين بالإزدواج المحصل

أى أن: $\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ع}_1 + \overleftarrow{ع}_2$ حيث: $\overleftarrow{ع}$ عزم الإزدواج المحصل

نتيجة:

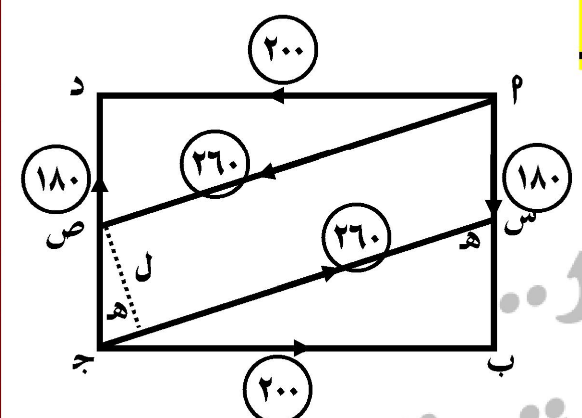
القياس الجبرى لعزم مجموع ازدواجين مستويين يساوى مجموع القياسين الجبريين لعزميهما

أى أن: $ع = ع_1 + ع_2$ حيث: ع القياس الجبرى لعزم الإزدواج المحصل

مثـــال:

$\overline{\text{أ}}$بجد مستطيل فيه أب = ١٠ سم ، بج = ١٢ سم ، س، ص منتصفا $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{جد}}$ أثرت قوى مقاديرها ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ث جم فى $\overrightarrow{\text{أب}}$، $\overrightarrow{\text{جب}}$، $\overrightarrow{\text{جد}}$ ، $\overrightarrow{\text{أد}}$ ، $\overrightarrow{\text{أص}}$، $\overrightarrow{\text{جس}}$ على الترتيب أوجد عزم الإزدواج المحصل.

الحـــل:



القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ ث جم تكونا إزدواج عزمه $ج_١$ حيث

$ج_١ = ٢٠٠ \times ١٠ = ٢٠٠٠$ ث جم.سم

القوتان ١٨٠ ، ١٨٠ ث جم تكونا إزدواج عزمه $ج_٢$ حيث

$ج_٢ = -١٨٠ \times ١٢ = -٢١٦٠$ ث جم.سم

القوتان ٢٦٠ ، ٢٦٠ ث جم تكونا إزدواج عزمه $ج_٣$ حيث

$ج_٣ = ٢٦٠ \times ل$ ث جم.سم

حساب طول ل:

$\because$ س، ص منتصفا $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{جد}}$ $\therefore$ س ب = ص ج = $\frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$ سم

$\therefore$ جس = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢} = ١٣$ سم $\therefore$ ل = جص جاهـ = $٥ \times \frac{١٢}{١٣} = \frac{٦٠}{١٣}$ سم

$\therefore ج_٣ = ٢٦٠ \times \frac{٦٠}{١٣} = ١٢٠٠$ ث جم.سم

ويكون عزم الإزدواج المحصل ج حيث

$ج = ج_١ + ج_٢ + ج_٣ = ٢٠٠٠ - ٢١٦٠ + ١٢٠٠ = ١٠٤٠$ ث جم.سم

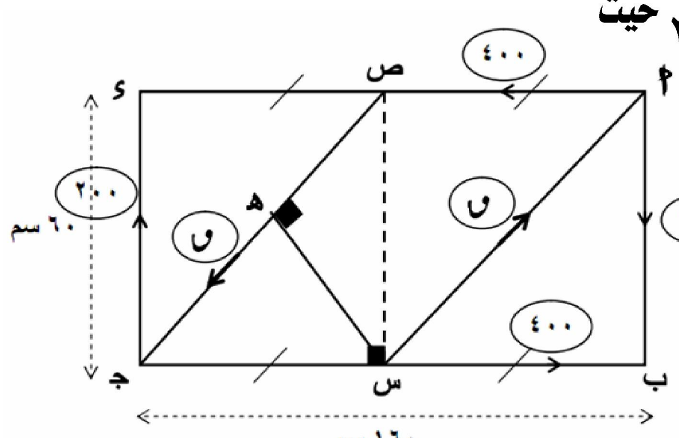
مثـــال:

أبجد مستطيل فيه أب = ٦٠ سم ، بج = ١٦٠ سم ، س، ص منتصفا $\overline{\text{بج}}$، $\overline{\text{أد}}$ أثرت قوى مقاديرها ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ق ، ق نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جد}}$ ، $\overrightarrow{\text{جب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أد}}$ ، $\overrightarrow{\text{سأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{صج}}$ على الترتيب فإذا كان القياس الجبرى لعزم الإزدواج المحصل يساوى ٦٤٠٠ نيوتن.سم ، أوجد قيمة ق .

الحـــل:

القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ نيوتن تكونا إزدواج عزمه $ج_١$

$ج_١ = -٢٠٠ \times ١٦٠ = -٣٢٠٠٠$ نيوتن.سم



القوتان ٤٠٠، ٤٠٠ نيوتن تكونا إزدواج عزمه $ج_٢$ حيث

$ج_٢ = ٤٠٠ \times ٦٠ = ٢٤٠٠٠$ نيوتن.سم

القوتان ق، ق نيوتن تكونا إزدواج عزمه $ج_٣$ حيث

$ج_٣ = ق \times$ س‌هـ نيوتن.سم

حساب طول سهـ :

∵ س، ص منتصفا $\overline{بج}$، $\overline{أء}$

∴ س ب = أص $= \frac{١}{٢} \times ١٦٠ = ٨٠$ سم

∴ أس = صج $= \sqrt{٦٠^٢ + ٨٠^٢} = ١٠٠$ سم ∴ سهـ $= \frac{٨٠ \times ٦٠}{١٠٠} = ٤٨$ سم

∴ $ج_٣ = ٤٨$ق

∵ عزم الإزدواج المحصل يساوى ٦٤٠٠ نيوتن.سم ∴ $ج_١ + ج_٢ + ج_٣ = ٦٤٠٠$

∴ $-٣٢٠٠٠ + ٢٤٠٠٠ + ٤٨ق = ٦٤٠٠$ ∴ $-٨٠٠٠ + ٤٨ق = ٦٤٠٠$

∴ $٤٨ق = ٨٠٠٠ + ٦٤٠٠ = ١٤٤٠٠$ ∴ ق $= \frac{١٤٤٠٠}{٤٨} = ٣٠٠$ نيوتن

مثـــال:

تؤثر القوى $\overleftarrow{ق_١} = ٤\overleftarrow{س} + ٢\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٢\overleftarrow{س} - ٣\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣} = -٦\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ عند النقط أ(٢، ٣)، ب(-٢، ٣) ، ج(٤، -٦) على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواج وأوجد معيار عزمه

الحـــل:

∴ $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = ٤\overleftarrow{س} + ٢\overleftarrow{ص} + ٢\overleftarrow{س} - ٣\overleftarrow{ص} - ٦\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{٠}$

∴ مجموعة القوى إما أن تكون متزنة أو تكافئ إزدواج

لذلك نوجد مجموع عزوم القوى حول أى نقطة ولتكن أ فيكون عزم $ق_١$ حول أ يساوى صفر

∴ $\overleftarrow{ج_أ} = \overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{أج} \times \overleftarrow{ق_٣}$ حيث

$\overleftarrow{أب}$ = ب − أ = (-٢، ٣) − (٢، ٣) = (-٤، ٠)

، $\overleftarrow{أج}$ = ج − أ = (٤، -٦) − (٢، ٣) = (٢، -٩)

∴ $\overleftarrow{ج_أ}$ = (-٤، ٠) × (٢، -٣) + (٢، -٩) × (-٦، ١)

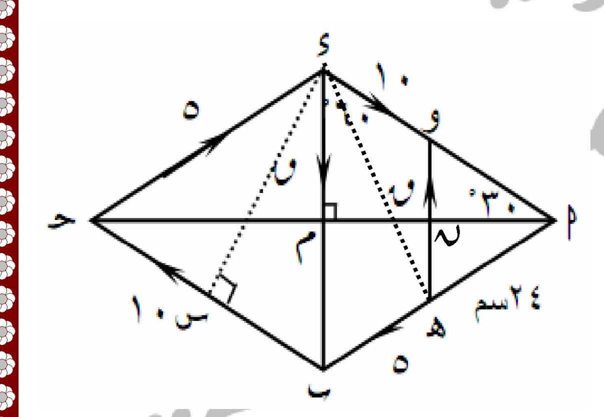
= (١٢ − ٠) ع⃖ + (٢ − ٥٤) ع⃖ = ١٢ ع⃖ − ٥٢ ع⃖ = ٤٠ ع⃖

∴ مجموعة القوى تكافئ إزدواج معيار عزمه = ٤٠ وحدة عزم

مثـــال:

أبجـء معين فيه ق(∠ أ) = ٦٠° ، طول ضلعه ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفات أب ، أء على الترتيب، أثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٥ ، ١٠ ، ١٠ ، ق ، ق نيوتن فى أب ، بجـ ، جـء ، ءأ ، ءب ، هـو على الترتيب.
فأذا كانت المجموعة متزنة، عين قيمة ق .

الحـــل:



حساب الأبعاد العمودية:

∵ ق(∠ أ) = ٦٠° ⟸ ∴ ق(∠ ءأم) = ٣٠°

∴ ق(∠ أءم) = ٦٠° ⟸ ∴ Δ أءم ثلاثينى ستينى

∴ ءم = $\frac{1}{2}$ أء = $\frac{1}{2}$ × ٢٤ = ١٢ سم

∴ أم = ١٢√٣ سم

∴ ءس = ءجـ جا ٦٠° = ٢٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٢√٣ سم

∴ ءهـ = ءأ جا ٦٠° = ٢٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٢√٣ سم

∵ هـ، و منتصفات أب، أء ∵ ن منتصف أم ∴ م ن = $\frac{1}{2}$ × ١٢√٣ = ٦√٣ سم

القوتان ١٠ ، ١٠ نيوتن تكونا إزدواج عزمه ج$_1$ حيث

ج$_1$ = − ١٠ × ءس = − ١٠ × ١٢√٣ = − ١٢٠√٣ نيوتن.سم

القوتان ٥، ٥ نيوتن تكونا إزدواج عزمه ج$_2$ حيث

ج$_2$ = − ٥ × ءهـ = − ٥ × ١٢√٣ = − ٦٠√٣ نيوتن.سم

القوتان ق ، ق نيوتن تكونا إزدواج عزمه ج$_3$ حيث

ج$_3$ = ق × م ن = ق × ٦√٣ = ٦√٣ ق نيوتن.سم

∵ المجموعة متوازنة ∴ ج$_1$ + ج$_2$ + ج$_3$ = ٠

∴ −١٢٠√٣ − ٦٠√٣ + ٦√٣ ق = ٠ ⟸ ∴ ٦ ق = ١٨٠ ⟸ ∴ ق = ٣٠ نيوتن

تذكر أن:

١) فى المعين القطران غير متساويين ، ومتعامدين ، وينصف كل منهما الآخر ، وينصف كل منهما زاويتى الرأسين الواصل بينهما .

٢) فى المثلث الثلاثيى الستينى يكون:

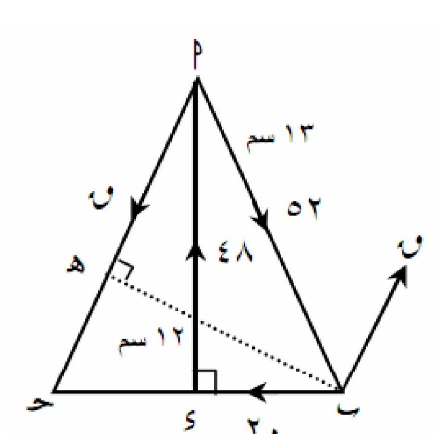
- طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° $= \frac{١}{٢}$ طول الوتر
- طول الضلع المقابل للزاوية ٦٠° $= \frac{١}{٢}$ طول الوتر × $\sqrt{٣}$

📖 مثـــال:

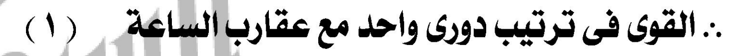
أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٣ سم ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ، أ ء = ١٢ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٥٢، ٢٠، ٤٨ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب .اثبت أن مجموعة القوى تكافئ إزدواج وأوجد القياس الجبرى لعزمه .ثم أوجد مقدار قوتين تؤثر احداهما فى $\overleftarrow{أ جـ}$ والأخرى تؤثر عند ب فى إتجاه $\overleftarrow{جـ أ}$ بحيث تصبح المجموعة فى حالة توازن.

✍ الحـــل:

∵ أ ب = ١٣ سم ، أ ء = ١٢ سم ∴ ب ء = $\sqrt{١٣^٢ - ١٢^٢}$ = ٥ سم



فى Δ أ ب ء : القوى ٥٢، ٢٠، ٤٨ تعمل فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$

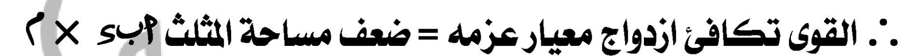

∴ القوى فى ترتيب دورى واحد مع عقارب الساعة (١)

بقسمة كل قوة على طول الضلع الممثل لها

∴ $\frac{٥٢}{أ ب} = \frac{٥٢}{١٣} = ٤$ ، $\frac{٢٠}{ب ء} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ ، $\frac{٤٨}{ء أ} = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$

∴ القوى الثلاثة ممثلة تمثيلا تاما بأضلاع المثلث حيث م = ٤ (٢)

من (١) ، (٢)


∴ القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه = ضعف مساحة المثلث أ ب ء × م

∴ عزم الإزدواج $ج_١ = -٢ \times (\frac{١}{٢} \times ب ء \times ء أ) \times م = -٢ \times \frac{١}{٢} \times ٥ \times ١٢ \times ٤ = -٢٤٠$ نيوتن.سم

نفرض أن القوتان اللتان تؤثران فى $\overleftarrow{أ جـ}$ وعند ب فى إتجاه $\overleftarrow{جـ أ}$ هما ق، ق

∴ القوتان ق ، ق نيوتن تكونا إزدواج عزمه $ج_٢$ حيث $ج_٢$ = ق × ب هـ نيوتن.سم

حساب طول به :

∵ مساحة $\triangle$ أبجـ $= \frac{1}{2}$ بجـ × أد $= \frac{1}{2}$ أجـ × به

∴ $\frac{1}{2}$ بجـ × أد $= \frac{1}{2}$ أجـ × به $\Leftarrow$ ∴ به $= \frac{\text{بجـ} \times \text{أد}}{\text{أجـ}}$

∴ به $= \frac{10 \times 12}{13} = \frac{120}{13}$ سم ∴ جـ$_2$ $=$ ق $\times \frac{120}{13} = \frac{120}{13}$ ق نيوتن.سم

∵ المجموعة متوازنة ∴ جـ$_1$ + جـ$_2$ = ٠ ∴ $-240 + \frac{120}{13}$ ق $= 0$

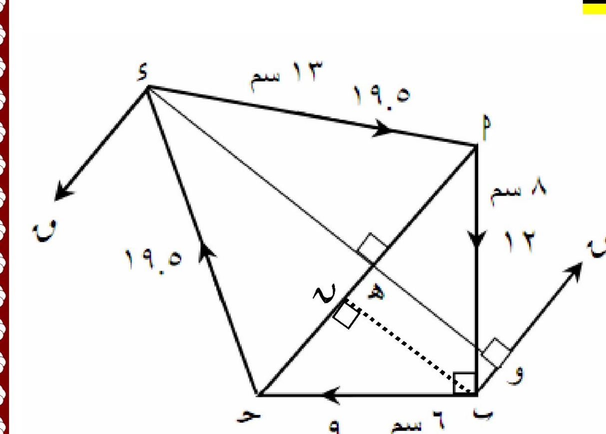
∴ ق $= 240 \times \frac{13}{120} = 26$ نيوتن ∴ القوتان هما ٢٦ ، ٢٦ نيوتن #

مثـــال:

أبجـد شكل رباعى فيه أب = ٨سم ، بجـ = ٦سم ، جـد = أد = ١٣سم ، ق(< أبجـ) = ٩٠°

أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ١٩,٥ ، ١٩,٥ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـد}}$ ، $\overleftarrow{\text{دأ}}$ على الترتيب .اثبت أن هذه القوى تكافئ إزدواج وأوجد معيار عزمه، ثم أوجد قوتين تؤثران عند ب ، د وتوازيان $\overleftrightarrow{\text{جـأ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ على الترتيب بحيث تصبح المجموعة فى حالة توازن.

الحـــل:



حساب الأطوال:

نرسم $\overline{\text{أجـ}}$ ثم نرسم $\overline{\text{ده}} \perp \overline{\text{أجـ}}$ فيقطع $\overline{\text{أجـ}}$ فى هـ

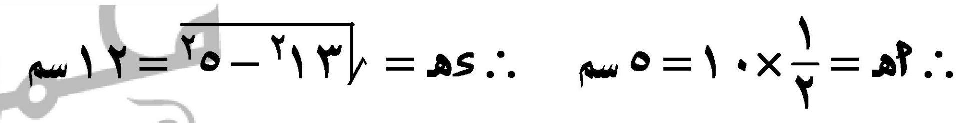
وخط عمل القوة ق المؤثرة عند ب فى و

∵ ق(< ب) = ٩٠° ، أب = ٨سم ، بجـ = ٦سم

∴ أجـ $= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ سم

∵ جـد = أد = ١٣سم ∴ $\triangle$ دأجـ متساوى الساقين

، ∵ $\overline{\text{ده}} \perp \overline{\text{أجـ}}$ ∴ هـ منتصف أجـ



∴ أه $= \frac{1}{2} \times 10 = 5$ سم ∴ ده $= \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ سم

فى الشكل أبجـد :

∵ القوى ١٢ ، ٩ ، ١٩,٥ ، ١٩,٥ تعمل فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـد}}$ ، $\overleftarrow{\text{دأ}}$

∴ القوى فى ترتيب دورى واحد مع عقارب الساعة (١)

∵ $\frac{١٢}{أب} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{بجـ} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١٩٫٥}{جـد} = \frac{١٩٫٥}{١٣} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١٩٫٥}{دأ} = \frac{١٩٫٥}{١٣} = \frac{٣}{٢}$

∴ القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع المثلث حيث $م = \frac{٣}{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه = ضعف مساحة الشكل أبجد × م

∴ عزم الإزدواج = −٢ × (مساحة المثلث أبجـ + مساحة المثلث أجـد) × م

∴ $ج_١ = -٢ \times (\frac{١}{٢} \times بجـ \times أب + \frac{١}{٢} \times أجـ \times دهـ) \times م$

$= -٢ \times (\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٨ + \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ١٢) \times \frac{٣}{٢} = -٢٥٢$ نيوتن.سم #

نفرض أن القوتان اللتان ب ، د تؤثران عند وتوازيان جـأ ، أجـ هما ق ، ق

∴ القوتان هما ق ، ق نيوتن تكونا إزدواج عزمه $ج_٢$ حيث $ج_٢ = ق \times دو$ نيوتن.سم

حساب طول دو :

نرسم $\overline{بن} \perp \overline{أجـ}$

∵ $\overline{بن} \perp \overline{أجـ}$ ، $\overline{وهـ} \perp \overline{أجـ}$ ∴ $\overline{بن} // \overline{وهـ}$ ، $\overline{بن} = \overline{وهـ}$

لكن $بن = \frac{أب \times بجـ}{أجـ} = \frac{٨ \times ٦}{١٠} = ٤٫٨$ سم ∴ وهـ = ٤٫٨ سم

∴ دو = دهـ + هـو = ١٢ + ٤٫٨ = ١٦٫٨ سم

∴ $ج_٢ = ق \times دو = ق \times ١٦٫٨ = ١٦٫٨$ ق نيوتن.سم

∵ المجموعة متوازنة ∴ $ج_١ + ج_٢ = ٠$ ∴ −٢٥٢ + ١٦٫٨ ق = ٠

∴ $ق = \frac{٢٥٢}{١٦٫٨} = ١٥$ نيوتن ∴ القوتان هما ١٥ ، ١٥ نيوتن #